СПЕЦИФИКАЦИЯ
диагностической работы по математике
для 11-х классов общеобразовательных организаций г. Москвы,
участвующих в проекте «Инженерный класс в московской школе»

1. Назначение диагностической работы

Диагностическая работа проводится **21 октября 2020 г**. с целью определения уровня подготовки обучающихся 11-х классов общеобразовательных организаций города Москвы в соответствии с требованиями Федерального компонента государственного образовательного стандарта.

2. Документы, определяющие содержание и параметры диагностической работы

Содержание и основные характеристики диагностических материалов определяются на основе следующих документов:

– Федеральный компонент государственного стандарта основного общего образования по математике (приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального, общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»);

– Приказ Минпросвещения России от 28.12.2018 № 345 «О федеральном перечне учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования»;

– Приказ Минобразования РФ от 17.04.2000 № 1122 «О сертификации качества педагогических тестовых материалов»;

– Примерные программы основного общего образования. М.: Просвещение, 2010.

3. Структура диагностической работы

Вариант диагностической работы состоит из 12 заданий.

Первая часть состоит из 9 заданий с кратким ответом.

Вторая часть состоит из 3 заданий с развёрнутым ответом. Задание № 12 представлено в двух вариантах – для разных УМК.

Задания 3, 7, 9 и 12 позволяют оценить функциональную грамотность обучающихся.

4. Условия проведения диагностической работы

Первая часть работы выполняется в компьютерной форме, вторая – на бланках тестирования. Продолжительность работы – 90 минут, включая два пятиминутных перерыва через каждые 30 минут для гимнастики глаз (на рабочем месте).

При выполнении заданий разрешается пользоваться линейкой.

5. Система оценивания заданий и работы в целом

Верное выполнение каждого из заданий с кратким ответом (№ 1 – № 9) оценивается в 1 балл. Задание с кратким ответом считается выполненным, если записанный ответ совпадает с эталоном.

Задание с развёрнутым ответом (№ 10 – № 12) оценивается в соответствии с критериями оценивания.

Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 15 баллов.

6. Распределение заданий диагностической работы по содержанию и проверяемым умениям

В таблицах 1 и 2 представлено распределение заданий по элементам содержания и контролируемым умениям*.

Таблица 1

Принадлежность заданий работы темам курса математики

Темы курса	Число заданий
Преобразования выражений, включающих арифметические операции	1
Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень	2
Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени	1
Рациональные уравнения	2
Иррациональные уравнения	1
Тригонометрические уравнения	1
Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений	1
Рациональные неравенства	1
Показательные неравенства	1
Логарифмические неравенства	1
Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком	1
Применение производной к исследованию функций и построению графиков	1
Планиметрия	2
Многогранники	2
Измерение геометрических величин	4
Вероятности событий	1

* Некоторые задания могут относиться к нескольким КЭС и КТ

Таблица 2

Принадлежность заданий контролируемым умениям

Контролируемые требования к уровню подготовки	Число заданий
Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма	1
Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования	1
Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции	1
Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы	4
Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы	2
Вычислять производные и первообразные элементарных функций	1
Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции	1
Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)	2
Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы	2
Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры	1
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин	1
Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения	2
Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий	1

В **Приложении 1** представлен план демонстрационного варианта диагностической работы.

В **Приложении 2** представлен демонстрационный вариант диагностической работы.

Приложение 1

План демонстрационного варианта проверочной работы

Позиция в тесте	Контролируемый элемент содержания
1	Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени
2	Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень
3	Планиметрия
4	Иррациональные уравнения
5	Вероятности событий
6	Планиметрия
7	Вычисления по формулам
8	Многогранники
9	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений
10	Тригонометрические уравнения
11	Измерение геометрических величин
12.1	Применение производной к исследованию функций и построению графиков
12.2	Показательные неравенства

Приложение 2

Демонстрационный вариант

Часть 1

В заданиях 1–9 дайте ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

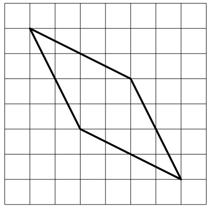
1 Вычислите: $1{,}5-4{,}5\cdot\sqrt{3{,}6}:\sqrt{10}$.

Ответ: ______________________.

2 Найдите значение выражения $\left(\dfrac{a^4}{2b}\right)^{-3}:\dfrac{b}{a^{12}}$ при $a=2{,}25$ $b=-6$.

Ответ: ______________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: ______________________.

4 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{4x+25}{13}}=5$.

Ответ: ______________________.

5 В группе 16 ребят, среди них два друга – Петя и Вася. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Петя и Вася окажутся в одной группе.

Ответ: ______________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $46°$, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ______________________.

7 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=1{,}4+14t-5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 11 метров?

Ответ: ______________________.

8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $\sqrt{6}$, сторона основания равна 5, а точки M и N – соответственно середины рёбер AA_1 и BB_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью CMN.

Ответ: ______________________.

9 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 15 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 7 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 37 часов после отправления из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ: ______________________.

Не забудьте перенести ответы в бланк тестирования.

Часть 2

В заданиях 10–12 запишите подробное решение и ответ на бланке тестирования.

10 Решите уравнение $\sin^4\dfrac{x}{4}-\cos^4\dfrac{x}{4}=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

11 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра, равной 6, найдите расстояние от точки A_1 до плоскости CB_1D_1.

Выберите и выполните только <u>ОДНО</u> из заданий 12.1 или 12.2.

12.1 Два тела одинаковой массы движутся прямолинейно по законам $x_1(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+2t^2-pt$ и $x_2(t)=t^3-4t^2-pt$ (перемещение измеряется в метрах, время – в секундах). Кинетическая энергия тела массой m вычисляется по формуле $E=\dfrac{mv^2}{2}$ (масса измеряется в килограммах, а скорость – в м/с). Найдите, при каких значениях p в первые три секунды движения кинетическая энергия второго тела не меньше кинетической энергии первого тела.

12.2 Найдите, при каких значениях $a>0$ неравенство $a^{2x+2}+3<4a^{x+1}$ имеет решения, каждое из которых принадлежат отрезку $[-2;2]$.

Настоящий текст является объектом авторского права. Свободное и безвозмездное использование любых материалов, входящих в состав данного текста, ограничено использованием в личных целях и допускается исключительно в некоммерческих целях. Нарушение вышеуказанных положений является нарушением авторских прав и влечёт наступление гражданской, административной и уголовной ответственности в соответствии с законодательством Российской Федерации. В случае самостоятельного использования материалов теста ГАОУ ДПО МЦКО не несёт ответственности за утрату актуальности текста.
© Московский центр качества образования.

Ответы к заданиям 1–9

Номер задания	Правильный ответ
1	–1,2
2	288
3	12
4	75
5	0,2
6	113
7	0,4
8	11,25
9	432

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

10 Решите уравнение $\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right);\ \left(\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}\right)\left(\sin^2\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}\right)=\sin x;$$

$$-\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2};\ \cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}+1\right)=0.$$

Откуда $\cos\frac{x}{2}=0$ или $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$.

Получаем: $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{x}{2}=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$,

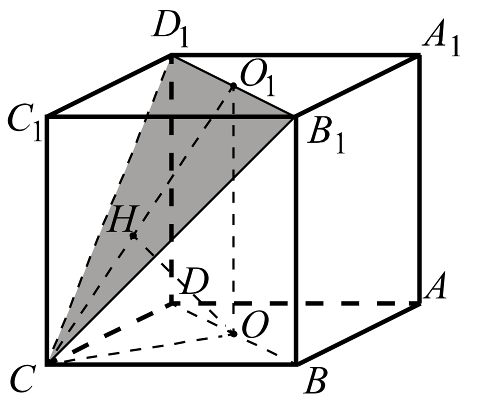
Откуда $x=\pi+2\pi k$, $x=-\frac{\pi}{3}+4\pi k$, $x=-\frac{5\pi}{3}+4\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi+2\pi k$, $-\frac{\pi}{3}+4\pi k$, $-\frac{5\pi}{3}+4\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Критерии оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

11 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра, равной 6, найдите расстояние от точки A_1 до плоскости CB_1D_1.

Решение.



Точки O и O_1 – центры оснований куба. Прямые OA_1 и CO_1 параллельны. Поэтому прямая OA_1 параллельна плоскости CB_1D_1, а искомое расстояние равно расстоянию от точки O до плоскости CB_1D_1.

Отрезок OH – высота треугольника COO_1.

Прямая B_1D_1 перпендикулярна прямой OO_1 (так как прямая OO_1 перпендикулярна основанию куба $A_1B_1C_1$) и прямой CO_1 (как основание и медиана равнобедренного треугольника CB_1D_1). Поэтому прямая B_1D_1 перпендикулярна плоскости COO_1, а значит перпендикулярна и прямой OH, лежащей в этой плоскости.

Получаем, что прямая OH перпендикулярна прямой B_1D_1, а также прямой CO_1, как высота треугольника COO_1. Значит, прямая OH перпендикулярна плоскости CB_1D_1, и OH – искомое расстояние.

В прямоугольном треугольнике COO_1:

$$CO_1=\sqrt{6^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2}=3\sqrt{6},$$

$$OH=\frac{6\cdot3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}=2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Критерии оценивания	Баллы
Обоснованное доказательство перпендикулярности прямых	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Настоящий текст является объектом авторского права. Свободное и безвозмездное использование любых материалов, входящих в состав данного текста, ограничено использованием в личных целях и допускается исключительно в некоммерческих целях. Нарушение вышеуказанных положений является нарушением авторских прав и влечёт наступление гражданской, административной и уголовной ответственности в соответствии с законодательством Российской Федерации. В случае самостоятельного использования материалов теста ГАОУ ДПО МЦКО не несёт ответственности за утрату актуальности текста.
© Московский центр качества образования.

12.1 Два тела одинаковой массы движутся прямолинейно по законам $x_1(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - pt$ и $x_2(t) = t^3 - 4t^2 - pt$ (перемещение измеряется в метрах, время – в секундах). Кинетическая энергия тела массой m вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$ (масса измеряется в килограммах, а скорость – в м/с). Найдите, при каких значениях p в первые три секунды движения кинетическая энергия второго тела не меньше кинетической энергии первого тела.

Решение.

$v_1(t) = -t^2 + 4t - p$; $v_2(t) = 3t^2 - 8t - p$.

$E_1 = \frac{m(-t^2+4t-p)^2}{2}$; $E_2 = \frac{m(3t^2-8t-p)^2}{2}$.

$$E_2 - E_1 = \frac{m(3t^2-8t-p)^2 - m(-t^2+4t-p)^2}{2} =$$

$$= \frac{m}{2}(3t^2-8t-p-t^2+4t-p)(3t^2-8t-p+t^2-4t+p) =$$

$$= 4mt(t-3)(t^2-2t-p).$$

По условию при $t \in (0;3)$ разность $E_2 - E_1$ не отрицательна, следовательно $t^2 - 2t - p \le 0$ на промежутке $(0;3)$.

Значит уравнение $t^2 - 2t - p = 0$ имеет два корня, причём, один из них не больше 0, а второй – не меньше 3.

Получаем: $p \ge -1$, $t_1 = 1 - \sqrt{1+p} \le 0$, $t_2 = 1 + \sqrt{1+p} \ge 3$, что верно при $p \ge 3$.

Ответ: $[3; +\infty)$.

Критерии оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения **ИЛИ** получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 3	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

12.2 Найдите, при каких значениях $a > 0$ неравенство $a^{2x+2} + 3 < 4a^{x+1}$ имеет решения, каждое из которых принадлежат отрезку $[-2; 2]$.

Решение.

1. $a \ne 1$.

Пусть $a^x = t$. Тогда $a^2t^2 - 4at + 3 < 0$.

$f(t) = a^2t^2 - 4at + 3$;

Найдём нули функции:

$a^2t^2 - 4at + 3 = 0$.

$D = 16a^2 - 12a^2 = 4a^2$; $t_1 = \frac{3}{a}$, $t_2 = \frac{1}{a}$.

$f(t)$ – квадратичная функция; ветви графика направлены вверх, значит $\left(\frac{1}{a}; \frac{3}{a}\right)$ – решение неравенства $a^2t^2 - 4at + 3 < 0$.

Значит, $\frac{1}{a} < a^x < \frac{3}{a}$.

а) При $a > 1$ получаем $x \in (-1; -1 + \log_a 3)$.

Любое решение неравенства будет принадлежать отрезку $[-2; 2]$, если $-1 + \log_a 3 \le 2$. Получаем $a \ge \sqrt[3]{3}$.

б) При $0 < a < 1$ получаем $x \in (-1 + \log_a 3; -1)$.

Любое решение неравенства будет принадлежать отрезку $[-2; 2]$, если $-2 \le -1 + \log_a 3$. Получаем $0 < a \le \frac{1}{3}$.

2. При $a = 1$ получаем: $1 + 3 < 4$, то есть неравенство решений не имеет.

Таким образом, $0 < a \le \frac{1}{3}$ или $a \ge \sqrt[3]{3}$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right]$, $\left[\sqrt[3]{3}; +\infty\right)$.

Критерии оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения **ИЛИ** получен ответ, отличающийся от верного исключением граничных точек $\frac{1}{3}$, $\sqrt[3]{3}$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Настоящий текст является объектом авторского права. Свободное и безвозмездное использование любых материалов, входящих в состав данного текста, ограничено использованием в личных целях и допускается исключительно в некоммерческих целях. Нарушение вышеуказанных положений является нарушением авторских прав и влечёт наступление гражданской, административной и уголовной ответственности в соответствии с законодательством Российской Федерации. В случае самостоятельного использования материалов теста ГАОУ ДПО МЦКО не несёт ответственности за утрату актуальности текста.
© Московский центр качества образования.