СПЕЦИФИКАЦИЯ
диагностической работы для 10-х классов по математике, участвующих в проектах «Инженерный класс в московской школе», «Курчатовский проект непрерывного конвергентного (междисциплинарного) образования», «Академический (научно-технологический) класс в московской школе»

1. Назначение диагностической работы

Диагностическая работа проводится **24 апреля 2019 г.** с целью определения уровня общеобразовательной подготовки по математике обучающихся 10-х классов общеобразовательных организаций г. Москвы, участвующих в вышеуказанных проектах.

2. Документы, определяющие содержание и параметры диагностической работы

Содержание и основные характеристики диагностических материалов определяются на основе следующих документов:

– Федеральный компонент государственного стандарта основного общего образования по математике (приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального, общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»).

– Приказ Минобрнауки России от 31.03.2014 № 253 «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования».

– Примерные программы основного общего образования. М.: Просвещение, 2010.

– Приказ Минобразования России от 17.04.2000 № 1122 «О сертификации качества педагогических тестовых материалов».

3. Структура диагностической работы

Работа состоит из двух частей, в каждой из которых присутствуют задания по алгебре, геометрии и практико-ориентированные задания, предназначенные для проверки умения применять математические навыки и умения в повседневных ситуациях.

Первая часть состоит из 9 заданий с кратким ответом.

Вторая часть состоит из 3 заданий с развёрнутым ответом. Назначение заданий второй части – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников. Вторая часть содержит задания повышенного уровня сложности из различных разделов курса математики. Все задания требуют записи решений и ответа.

Всего в работе 12 заданий.

4. Условия проведения диагностической работы

Первая часть работы выполняется в компьютерной форме, вторая – на бланках тестирования. Продолжительность работы – 90 минут, включая два пятиминутных перерыва через каждые 30 минут для гимнастики глаз (на рабочем месте).

При выполнении заданий разрешается пользоваться линейкой.

5. Система оценивания заданий и работы в целом

Верное выполнение каждого из заданий с кратким ответом (1–9) оценивается в 1 балл. Задание с кратким ответом считается выполненным, если записанный ответ совпадает с эталоном.

Задания с развёрнутым ответом (10–12) оцениваются в соответствии с критериями оценивания.

Максимальный первичный балл за выполнение всей работы – 15 баллов.

За выполнение диагностической работы обучающиеся получают оценки по пятибалльной шкале.

6. Распределение заданий диагностической работы по содержанию и проверяемым умениям

В таблицах 1 и 2 представлено распределение заданий по элементам содержания и контролируемым умениям.

Таблица 1

Принадлежность заданий работы темам курса математики*

№	Темы курса	Число заданий
1	Степень с целым показателем	1
2	Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень	2
3	Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени	1
4	Рациональные уравнения	2
5	Иррациональные уравнения	1
6	Тригонометрические уравнения	1
7	Показательные уравнения	1
8	Логарифмические уравнения	1
9	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений	1
10	Рациональные неравенства	1
11	Показательные неравенства	1
12	Логарифмические неравенства	1
13	Функция, область определения функции	1
14	Множество значений функции	1
15	Квадратичная функция, её график	1
16	Уравнение касательной к графику функции	1
17	Применение производной к исследованию функций и построению графиков	1
18	Окружность и круг	1
19	Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника	1
20	Сечения куба, призмы, пирамиды	1
21	Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности	1
22	Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями	3
23	Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника	1
24	Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми, расстояние между параллельными плоскостями	2
25	Вероятности событий	1

* Некоторые задания могут относиться к нескольким темам и контролируемым умениям

Таблица 2

Принадлежность заданий контролируемым умениям

№	Контролируемые требования к уровню подготовки	Число заданий
1	Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма	1
2	Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования	1
3	Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции	1
4	Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы	4
5	Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы	2
6	Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций	2
7	Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции	1
8	Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)	2
9	Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы	2
10	Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры	1
11	Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий	1

В **Приложении 1** приведён план демонстрационного варианта работы.
В **Приложении 2** приведён демонстрационный вариант работы.

Приложение 1

План демонстрационного варианта проверочной работы

Позиция в тесте	Контролируемый элемент содержания
1	Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени
2	Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень
3	Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника
4	Иррациональные уравнения
5	Вероятности событий
6	Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности
7	Функция, область определения функции
8	Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями
9	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений
10.1	Тригонометрические уравнения
10.2	Показательные уравнения
11	Сечения куба, призмы, пирамиды
12.1	Применение производной к исследованию функций и построению графиков
12.2	Логарифмические неравенства

Приложение 2

Демонстрационный вариант

Часть 1

В заданиях 1–9 дайте ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

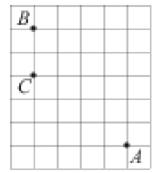
1 Вычислите: $2{,}7-7:\sqrt{2{,}5}:\sqrt{10}$.

Ответ: ___________________________.

2 Найдите значение выражения $\left(\frac{2a^4}{b}\right)^{-3}\cdot a^{12}$ при $a=1{,}75$ $b=-4$.

Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1х1 отмечены точки *A*, *B* и *C*. Найдите расстояние от точки *A* до прямой *BC*.



Ответ: ___________________________.

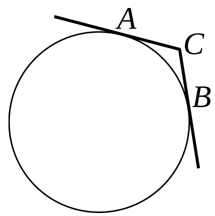
4 Найдите корень уравнения $\sqrt{6+5x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Ответ: ___________________________.

5 Помещение освещается светильником с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: ___________________________.

6 Касательные *CA* и *CB* к окружности образуют угол *ACB*, равный 122°. Найдите градусную меру меньшей дуги *AB*.



Ответ: ___________________________.

7 Найдите сумму всех целых чисел, принадлежащих области определения функции $y=\sqrt{6-\sqrt{16+x^2-8x}}$.

Ответ: ___________________________.

8 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью ABC_1 и прямой AB_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

9 Из городов A и B одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 8 часов раньше, чем велосипедист приехал в A, а встретились они через 54 минуты после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?

Ответ: ___________________________.

Часть 2

В заданиях* 10–12 *запишите решение и ответ в бланке тестирования.

***Выберите и выполните только <u>ОДНО</u> из заданий* 10.1 *или* 10.2.**
Укажите в бланке номер выполняемого задания.

10.1 Решите уравнение $4\cos^3\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+6\sin x+1=\cos 2x$.

10.2 Решите уравнение $7^{x^2-2x-1}+7^{x^2-2x-2}=8$.

11 Найдите площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра, равной 4, плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра AB.

***Выберите и выполните только <u>ОДНО</u> из заданий* 12.1 *или* 12.2.**
Укажите в бланке номер выполняемого задания.

12.1 Найдите, при каких значениях a функции $f(x)=ax^3-5ax^2+\dfrac{50}{a}x$ возрастает на всей области определения.

12.2 Найдите, при каких значениях a любое значение из промежутка $(16;24)$ будет являться решением неравенства $\log_a^2 x-2\log_a x\geq 8$.

Ответы к заданиям 1–9

Номер задания	Правильный ответ
1	1,3
2	–8
3	4
4	6
5	0,91
6	58
7	52
8	30
9	9

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

10.1 Решите уравнение $4\cos^3\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+6\sin x+1=\cos 2x$.

Решение.

$$4\cos^3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+6\sin x+1=\cos 2x;\ -4\sin^3 x+6\sin x+1-1+2\sin^2 x=0;$$

$$-2\sin x\left(2\sin^2 x-\sin x-3\right)=0;\ \sin x(\sin x+1{,}5)(\sin x-1)=0.$$

Откуда $\sin x=0$ или $\sin x=-1$; уравнение $\sin x=-1{,}5$ решений не имеет.

Получаем: $x=\pi k$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: πk, $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Критерии оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

10.2 Решите уравнение $7^{x^2-2x-1}+7^{x^2-2x-2}=8$.

Решение.

$$7^{x^2-2x-1}+7^{x^2-2x-2}=8.$$
$$7^{x^2-2x-2}(7+1)=8;$$
$$7^{x^2-2x-2}=7^0;$$
$$x^2-2x-2=0,$$

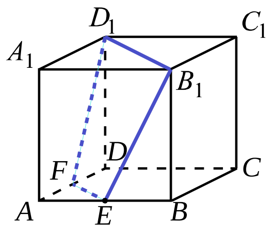
откуда $x=1\pm\sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{3}$.

Критерии оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

11 Найдите площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра, равной 4, плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра AB.

Решение.



Точка E – середина ребра AB. Плоскость EB_1D_1 пересекает плоскость ABC по прямой, параллельной B_1D_1, то есть по прямой EF, где точка F – середина ребра AD.
Искомое сечение – равнобедренная трапеция FEB_1D_1, в которой $B_1D_1=4\sqrt{2}$, $EF=2\sqrt{2}$, $FD_1=EB_1=2\sqrt{5}$.

Высота трапеции FEB_1D_1 равна $\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$.

Значит, площадь трапеции равна $3\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=18$.

Ответ: 18.

Критерии оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

12.1 Найдите, при каких значениях a функции $f(x)=ax^3-5ax^2+\frac{50}{a}x$ возрастает на всей области определения.

Решение.

$a\neq0$.
Область определния функции $f(x)$ – все действительные числа.
Функция $f(x)$ дифференцируема. Найдём её производную:
$$f'(x)=3ax^2-10ax+\frac{50}{a}.$$
При каждом ненулевом значении a функция $y=f'(x)$ квадратичная, поэтому:

1) при $a<0$ всегда найдётся такое x, при котором $f'(x)<0$.
2) при $a>0$ функция $f(x)$ возрастает на всей области определения, если дискриминант трёхчлена $3ax^2-10ax+\frac{50}{a}$ меньше или равен нулю:
$$D=(10a)^2-4\cdot3a\cdot\frac{50}{a}=100a^2-600\le0.$$
$$a^2\le6 \text{ при } -\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}.$$
При условии $a>0$ получаем $0<a\le\sqrt{6}$.

Ответ: $\left(0;\sqrt{6}\right]$.

Критерии оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

12.2 Найдите, при каких значениях a любое значение из промежутка $(16;24)$ будет являться решением неравенства $\log_a^2x-2\log_ax\ge8$.

Решение.

$a>0$; $a\neq1$.
Пусть $\log_ax=t$. Тогда $t^2-2t-8\ge0$; $(t-4)(t+2)\ge0$.
Откуда $t\le-2$ или $t\ge4$.
1) $\log_ax\le-2$.

а) при $a>1$ получаем $0<x\le\frac{1}{a^2}$. Так как при $a>1$ выполнено $\frac{1}{a^2}<1$, то значения из промежутка $(16;24)$ не могут являться решениями неравенства.

б) при $0<a<1$ получаем $x\ge\frac{1}{a^2}$. При $\frac{1}{a^2}\le 16$ любое значение из промежутка $(16;24)$ является решением неравенства. То есть $\frac{1}{4}\le a<1$.

2) $\log_a x\ge 4$.

а) при $a>1$ получаем $x\ge a^4$. При $a^4\le 16$ любое значение из промежутка $(16;24)$ является решение неравенства. То есть $1<a\le 2$.

б) при $0<a<1$ получаем $0<x\le a^4$. Так как при $0<a<1$ выполнено $a^4<1$, то значения из промежутка $(16;24)$ не могут являться решениями неравенства.

Таким образом, $\frac{1}{4}\le a<1$ или $1<a\le 2$.

Ответ: $\left[\frac{1}{4};1\right)$, $(1;2]$.

Критерии оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения **ИЛИ** получен ответ, отличающийся от верного исключением граничных точек $\frac{1}{4}$, 2.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2